

Örnek : Bir mühendis şehir merkezinin dört yönde sabah saatlerinde başlayarak trafik modellemesi üzerinde çalışmaktadır. Mühendis gözlem yapmaya saat 5:30'da başlar. Yör. X: Kuzey-güney yönünden kavşağa ilk araç varış zamanını, Y: Doğu-batı yönden ilk araç varış zamanı olsun. X ve Y'lerin birim y.f. nu veriliyor.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 \leq y < x < 1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

a) $f(x,y)$ 'nin iki boyutlu t.d. nin o.y.f. olduğunu gösteriniz.

b) $P(X \leq 0.5, Y \leq 0.25) = ?$

c) X ve Y 'nin marginal yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: a) $f(x,y)$ 'nin o.y.f. olması için

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy dx = 1 \text{ olması.}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{x} dy dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x} \cdot y \Big|_0^x \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x}{x} - 0 \right) dx = \int_0^1 1 dx = x \Big|_0^1 = 1 //$$

old. dan $f(x,y)$ bir o.y.f. dir.

b) $P(X \leq 0.5, Y \leq 0.25) = \iint_{R_1} \frac{1}{x} dy dx + \iint_{R_2} \frac{1}{x} dy dx$

$R_1 + R_2 = \int_{x=0}^{0.25} \int_{y=0}^x \frac{1}{x} dy dx + \int_{x=0.25}^{0.5} \int_{y=0}^{0.25} \frac{1}{x} dy dx$

$$= \int_0^{0.25} \frac{y}{x} \Big|_{y=0}^x dx + \int_{0.25}^{0.5} \frac{y}{x} \Big|_{y=0}^{0.25} dx$$

$$= \int_0^{0.25} 1 dx + \int_{0.25}^{0.5} \frac{0.25}{x} dx$$

$$= x \Big|_0^{0.25} + (0.25) \cdot \ln x \Big|_{0.25}^{0.5} = (0.25) + (0.25) \cdot (\ln 0.5 - \ln 0.25) = (0.25) \cdot [1 + \ln 0.5 - \ln 0.25] //$$



c) X t.d. için Marginal y.f.

$$g(x) = \int_{y=0}^x f(x,y) dy = \int_0^x \frac{1}{x} dy = \frac{y}{x} \Big|_0^x = 1 //$$

Y t.d. için Marginal y.f.

$$h(y) = \int_{x=y}^1 f(x,y) dx = \int_y^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_y^1 = \ln 1 - \ln y = -\ln y \text{ olur.}$$

$x=y$
 $x=0$ to $x=1$ için